

Infos: ◇ Examen blanc lundi 28 avril en CM3 (8h30 - 9h30)

contenu: jusqu'aux polynômes de Taylor (§4.3) compris.

⟨⟩ Problème stream cours jeudi passé: Service Desk a confirmé un problème mediaspace (résolu)

◇ Sondage: celles et ceux qui ont suivi Analyse I avec moi, j'ai besoin de votre avis sur les indications supplémentaires données pour les exercices d'analyse I (But/théorie nécessaire)

Rappel: Polynôme de Taylor dans $\mathbb{R}^2$

$$p(x, y) = \sum_{j=0}^n \sum_{\alpha=0}^j \frac{1}{\alpha!} \frac{1}{(j-\alpha)!} \frac{\partial^j f}{\partial x^\alpha \partial y^{j-\alpha}}(\tilde{x}, \tilde{y}) (x - \tilde{x})^\alpha (y - \tilde{y})^{j-\alpha}$$

Remarque 4.31 Généralisation.

La notion de polynôme de Taylor se généralise en

dimension 3:

$$P_h(x, y) = \sum_{j=0}^h \sum_{\alpha=0}^j \sum_{\beta=0}^{j-\alpha} \frac{1}{\alpha!} \frac{1}{\beta!} \frac{1}{(j-\alpha-\beta)!} \frac{\partial^j f}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^{j-\alpha-\beta}} (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \\ \cdot (x - \tilde{x})^\alpha (y - \tilde{y})^\beta (z - \tilde{z})^{j-\alpha-\beta}$$

ou à $\mathbb{R}^n$:

$$P_h(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=0}^h \sum_{\substack{\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N} \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_n = j}} \frac{1}{\alpha_1!} \frac{1}{\alpha_2!} \dots \frac{1}{\alpha_n!} \frac{\partial^j f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) \\ \cdot (x_1 - \tilde{x}_1)^{\alpha_1} \dots (x_n - \tilde{x}_n)^{\alpha_n}$$

§4.4 Dérivées partielles et fonctions différentiables ($f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$)

Définition 4.32 (Matrice jacobienne, différentiable, C^1)

Soit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert, $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) \in D$,

$$f = (f_1, \dots, f_m) : D \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

(i) Si toutes les dérivées partielles de toutes les composantes de f existent en $\tilde{x}$, i.e. $\forall 1 \leq i \leq m, \forall 1 \leq j \leq n, \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\tilde{x})$

existe, on définit la matrice jacobienne de f en $\tilde{x}$ noté $\nabla f(\tilde{x})$, par

$$\nabla f(\tilde{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\tilde{x}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\tilde{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\tilde{x}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\tilde{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - & \nabla f_1 & - \\ - & \nabla f_2 & - \\ & \vdots & \\ - & \nabla f_m & - \end{bmatrix}$$

qui est une matrice rectangulaire à m lignes et n colonnes. On a $(\nabla f(\tilde{x}))_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\tilde{x})$

(ii) On dit que f est différentiable (en $\tilde{x}$) si chaque composante de f est différentiable (en $\tilde{x}$)

(iii) On dit que f est de classe C^k et on note $f \in C^k(D; \mathbb{R}^m)$ si chaque composante de f est de classe C^k , i.e. $\forall 1 \leq i \leq m, f_i \in C^k(D)$

Remarque 4.33

La convention sur les lignes et les colonnes de la matrice jacobienne est arbitraire et dépend du livre / cours que vous suivez. En particulier, les formules qui utilisent

la multiplication matricielle change.

Proposition 4.34

Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$. Alors,

(i) $f \in C^1(D; \mathbb{R}^m) \Rightarrow f$ est différentiable $\Rightarrow f$ est continue

(ii) f est différentiable en $\tilde{x}$ si et seulement si

$$\lim_{h=(h_1, \dots, h_n) \rightarrow (0, \dots, 0)} \frac{f(\tilde{x}+h) - f(\tilde{x}) - h^T Jf(\tilde{x})}{\|h\|} = 0$$

Exemple 4.35

(i) Les coordonnées polaires:

Soit $f: \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

$$\begin{aligned} & [1 \times n] \begin{bmatrix} n \times m \end{bmatrix} \\ & = [1 \times m] \end{aligned}$$

$$\nabla f(r, \theta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r}(r, \theta) & \frac{\partial f_1}{\partial \theta}(r, \theta) \\ \frac{\partial f_2}{\partial r}(r, \theta) & \frac{\partial f_2}{\partial \theta}(r, \theta) \end{bmatrix}$$

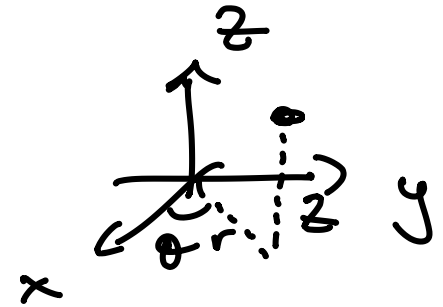
$$= \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} f_1(r, \theta) &= r \cos \theta \\ f_2(r, \theta) &= r \sin \theta \end{aligned}$$

(ii) Coordonnées cylindriques.

$f: \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(r, \theta, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$$



$$\nabla f(r, \theta, z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r}(r, \theta, z) & \frac{\partial f_1}{\partial \theta}(r, \theta, z) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(r, \theta, z) \\ \frac{\partial f_2}{\partial r}(r, \theta, z) & \frac{\partial f_2}{\partial \theta}(r, \theta, z) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(r, \theta, z) \\ \frac{\partial f_3}{\partial r}(r, \theta, z) & \frac{\partial f_3}{\partial \theta}(r, \theta, z) & \frac{\partial f_3}{\partial z}(r, \theta, z) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Intermède artistique: Dessiner des domaines à symétrie

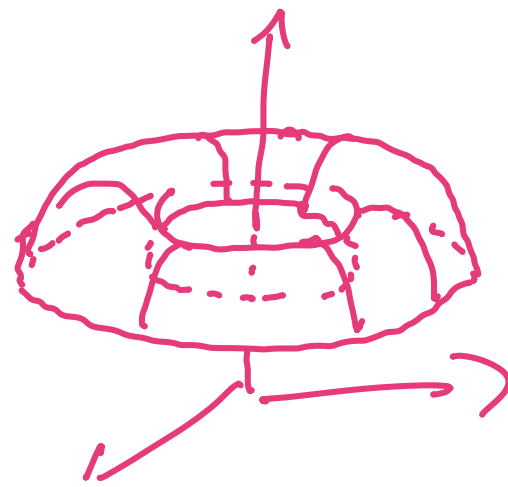
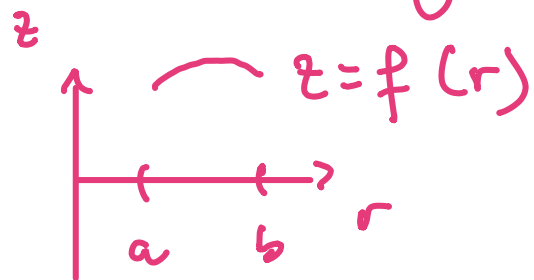
un domaine / ensemble qui a une symétrie cylindrique
s'écrivent généralement

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \underset{z}{\overset{z}{\leq}} f(\sqrt{x^2 + y^2}), \quad a < \sqrt{x^2 + y^2} < b, \quad \text{d'autres tracs} \}$$

$$(x, y, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$$

$$z = f(\sqrt{x^2 + y^2}) \iff z = f(r)$$

$$a < \sqrt{x^2 + y^2} < b, \quad a < r < b.$$



(iii) coordonnées sphériques $\rightarrow$ à lire poly p. 104.

Théorème 4.36 (règle de chaîne, dérivée d'un produit de composition)

Soient $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $E \subseteq \mathbb{R}^m$ deux ouverts

(i) Soient $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ différentiable tq $f(D) \subseteq E$
et $g: E \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable. $f = f(x_1, \dots, x_n)$

$$g = g(y_1, \dots, y_m)$$

Alors, $g \circ f: D \rightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto g \circ f(x) = g(f(x))$ est différentiable

et $\forall 1 \leq j \leq n$,

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_j}(x) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial g}{\partial y_k}(f(x)) \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x)$$

(ii) Si f est comme ci-dessus et $g: E \rightarrow \mathbb{R}^l$, alors,
 $g \circ f: D \rightarrow \mathbb{R}^l$ est différentiable et $\forall 1 \leq i \leq l$,
 $\forall 1 \leq j \leq n$

$$\frac{\partial (g \circ f)_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial (g_i \circ f)}{\partial x_j}(x) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(x)) \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x)$$

Remarque 4.37 (Notations matricielles)

(i) Soient f et g comme dans la partie (ii).
 Alors, la formule se réécrit:

$$\nabla(g \circ f)(x) = \nabla g(f(x)) \cdot \nabla f(x)$$

$$"(g \circ f)' = g' \circ f \cdot f'"$$

$$\begin{bmatrix} l \times n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \times m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \times n \end{bmatrix}$$

On rappelle que $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^m A_{ik} B_{kj}$

On a

$$\begin{aligned} (\nabla(g \circ f)(x))_{ij} &= \frac{\partial (g \circ f)_i}{\partial x_j}(x) = \sum_{k=1}^m \underbrace{\frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(x))}_{(\nabla g(f(x)))_{ik}} \cdot \underbrace{\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x)}_{(\nabla f(x))_{kj}} \\ &= \sum_{k=1}^m (\nabla g(f(x)))_{ik} (\nabla f(x))_{kj} = (\nabla g(f(x)) \cdot \nabla f(x))_{ij} \end{aligned}$$

Idem si f & g sont comme dans la partie (i)

$$\nabla(g \circ f) = \nabla g(f(x)) \cdot \nabla f(x)$$

gradient $\rightarrow$
matrice jacobienne

$$\begin{matrix} [1 \times n] & [1 \times m] & [m \times n] \end{matrix}$$

(ii) Dans le cas particulier $n = l = 1$. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$. La formule dit f' est un vecteur ligne!

$$(g \circ f)'(x) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial g}{\partial y_k}(f(x)) \cdot f'_k(x) = \nabla g(f(x)) \cdot f'(x)^T$$

On interprète $\rightarrow (g \circ f)'(x) = \nabla g(f(x)) \cdot \nabla f(x) = \nabla g(f(x)) \cdot f'(x)^T$
 $\nabla f(x) = f'(x)^T$

$$\nabla \mu = \begin{bmatrix} -\nabla g_1 \\ \vdots \\ -\nabla g_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1' \\ \vdots \\ g_m' \end{bmatrix} = g'^T$$

Exemple 4.38 (i) Gradient en coordonnées polaires.

$$f \in C^1(\mathbb{R}^2), \quad g: \mathbb{R}_+^* \times]0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}.$$

$$g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta) = f \circ \gamma \quad \text{où}$$

$$\gamma(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

Montrons que $(\nabla f)(r \cos \theta, r \sin \theta)$

$$= \left(\frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) \cdot \cos \theta - \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) \frac{\sin \theta}{r}, \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) \sin \theta + \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) \frac{\cos \theta}{r} \right)$$

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = \frac{\partial}{\partial r} [f(r \cos \theta, r \sin \theta)]$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) \frac{\partial}{\partial r} [r \cos \theta] + \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) \frac{\partial}{\partial r} [r \sin \theta]$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) \cdot \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) \cdot \sin \theta.$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} [f(r \cos \theta, r \sin \theta)]$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) \frac{\partial}{\partial \theta} [r \cos \theta] + \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) \frac{\partial}{\partial \theta} [r \sin \theta]$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) (-r \sin \theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) \cdot r \cos \theta.$$

$$\Rightarrow \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) \sin \theta + \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) \cdot \frac{\cos(\theta)}{r}$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) \sin \theta \right) \cdot \sin \theta$$

$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) \cdot (-r \sin \theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) r \cos \theta \right) \cdot \frac{\cos \theta}{r}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) (\cos \theta \sin \theta - \cos \theta \sin \theta)$$

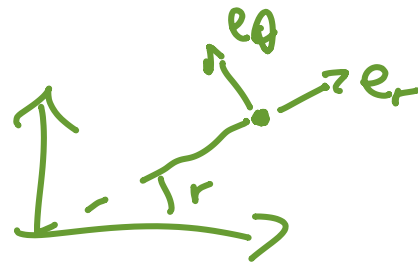
$$+ \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

Idem per $\frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta)$

Il me semble qu'en physique, quand on veut exprimer le gradient en coordonnées polaires, on l'exprime dans un autre repère.

$$e_r = (\cos\theta, \sin\theta)$$

$$e_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta)$$



(e_r, e_θ) est orthonormale: $\|e_r\| = \|e_\theta\| = 1$,

$$\langle e_r, e_\theta \rangle = 0.$$

$$\nabla f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{\partial g}{\partial r} \cdot e_r + r \cdot \frac{\partial g}{\partial \theta} \cdot e_\theta$$